© *С.К. Соболев*. Краткие лекции по линейной алгебре.

Лекция 5.

Лекция 5-6. Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный и самосопряженный операторы, их матрицы в ортонормированном базисе. Свойства корней характеристического многочлена самосопряженного оператора: вещественность и равенство алгебраических и геометрических кратностей (без док-ва). Ортогональность собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих различным собственным значениям. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора (док-во для случая различных собственных значений). Ортогональные преобразования, ортогональные матрицы и их свойства. Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием.

[Материал этой лекции желательно прочитать за 3 акад. часа]

5.1. Линейные операторы в евклидовых пространствах. На прошлых лекциях мы рассматривали линейные операторы в произвольных **линейных** пространствах. Теперь изучим особенности линейных операторов, действующих в **евклидовых** пространствах. Напомним, что евклидово пространство – это линейное пространство *E*, в котором задано скалярное произведение $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\mathbf{R}$ любых двух векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in E$, удовлетворяющее четырём аксиомам:

E1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$;

E2) $(\boldsymbol{a},(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}))=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$;

E3) $(\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$;

E4) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\ge 0$, причем $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

В евклидовом пространстве определена норма $\|\boldsymbol{a}\|$ любого вектора $\boldsymbol{a}\in E$ по формуле

$$\|\boldsymbol{a}\|\underset{def}{=}\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})},$$

она обладает свойствами

N1) $\|\boldsymbol{a}\|\ge 0$, причем, $\|\boldsymbol{a}\|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=0$**;**

N2) $\|\lambda\boldsymbol{a}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{a}\|$ **(**здесь $|\lambda|$ – обычная абсолютная величина числа λ **);**

N3) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\le\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$ **(неравенство треугольника).**

5.2. Сопряженный оператор и его матрица в ортонормированном базисе.

Определение. Пусть дан оператор (не обязательно линейный) $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве *E*, т.е. $\mathcal{A}:E\to E$. Оператор $\mathcal{B}:E\to E$ называется ***сопряженным*** к оператору $\mathcal{A}$, если выполняется равенство $\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}\right)=\left(\boldsymbol{x},\mathcal{B}(\boldsymbol{y})\right)$ для всех $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$. (линейность оператора $\mathcal{B}$ в этом определении тоже не предполагается. Изучим свойство сопряженного оператора.

Но сначала докажем простую лемму

Лемма 1. *Если вектор **a** ортогонален всем векторам евклидова пространства E, то вектор* $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

В самом деле, если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=0$ для всех $\boldsymbol{x}\in E$, то это верно и для $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, получим $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

Следствие. *Если* $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x})$ *для всех* $\boldsymbol{x}\in E$*, то* $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

Теорема 5. 1. *Для каждого оператора сопряженный к нему оператор единственен.*

В самом деле, пусть для оператора $\mathcal{A}$ имеются два оператора $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$, ему сопряженных.

Тогда для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$:

$$\left(\mathcal{B}_1(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}\right)=\left(\boldsymbol{x},\mathcal{A}(\boldsymbol{y})\right)=\left(\mathcal{B}_2(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}\right)$$

Из следствия из Леммы следует, что

$$\mathcal{B}_1(\boldsymbol{x})=\mathcal{B}_2(\boldsymbol{x})$$

для всех $\boldsymbol{x}\in E$. Это и значит, что $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}_2$. ■

Поскольку для оператора $\mathcal{A}$ сопряженный к нему оператор $\mathcal{B}$ единственен, мы можем для него ввести обозначение:

$$\mathcal{B}=\mathcal{A}^*$$

Теорема 2. *Для каждого оператора* $\mathcal{A}:E\to E$ *справедливо равенство* $\left(\mathcal{A}^*\right)^*=\mathcal{A}$.

Другими словами, утверждается, что если $\mathcal{A}^*=\mathcal{B}$, то $\mathcal{B}^*=\mathcal{A}$.

Но это очевидно следует из определения.

Теорема 3. *Для любого оператора $\mathcal{A}$ если сопряженный к нему оператор $\mathcal{A}^*$ существует, то оператор $\mathcal{A}^*$ линейный.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Тогда для любого $\boldsymbol{z} \in E$

$$\left(\mathcal{A}^*(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}\right) = \left((\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}), \mathcal{A}(\boldsymbol{z})\right) = \alpha\left(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}(\boldsymbol{z})\right) + \beta\left(\boldsymbol{y}, \mathcal{A}(\boldsymbol{z})\right) =$$
$$= \alpha\left(\mathcal{A}^*(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}\right) + \beta\left(\mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}\right) = \left(\alpha\mathcal{A}^*(\boldsymbol{x}) + \beta\mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}\right)$$

В силу произвольности вектора $\boldsymbol{z}$,

$$\mathcal{A}^*(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha\mathcal{A}^*(\boldsymbol{x}) + \beta\mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}).$$

Это и означает линейность сопряженного оператора. ■

Следствие. *Если для оператора $\mathcal{A}$ существует сопряженный $\mathcal{A}^*$, то и сам оператор $\mathcal{A}$ линейный.*

Доказательство. Действительно, тогда существует и второй сопряжённый оператор $\left(\mathcal{A}^*\right)^* = \mathcal{A}$, который, по теореме 3, линейный. ■

Итак, сопряженный оператор может существовать только у линейного оператора.

Теорема 4. *Если в конечномерном евклидовом пространстве задан ортонормированный базис, и этом базисе линейный оператор A ему сопряженный A* имеют матрицы A и A* соответственно, то*

$$A^* = A^{\mathsf{T}}$$

Т.е. в ортонормированном базисе матрица сопряженного оператора является транспонированной матрицей самого оператора.

Доказательство.

Для дальнейшего изложения полезны следующие простые факты из теории матриц.

Заметим, что если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в ортонормированном базисе, то их скалярное произведение можно записать в виде матричного произведения:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_3 + \ldots + x_n y_n = (x_1\ x_2\ \ldots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T Y = Y^T X.$$

Аксиома Е4 скалярного произведения тогда говорит, что если $X^{\mathsf{T}} X = 0$, то и $X = O$ (нулевой столбец). Аналогично, если $XX^{\mathsf{T}} = 0$ для строки X, то $X = O$.

Докажем несколько полезных лемм.

Лемма 2. *Пусть матрица A размером $m \times n$ такова, что $AX = O$ для любого столбца X размером $n \times 1$. Тогда матрица A нулевая: $A = O$.*

Доказательство. Пусть матрица A состоит из строк $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Тогда по условию, $A_i X = 0$ для любого столбца X ($i = 1, \ldots, m$). Взяв в качестве $X = A_i^{\mathsf{T}}$ получим $A_i A_i^{\mathsf{T}} = 0 \Rightarrow A_i = O$ ($i = 1, \ldots, m$). Следовательно, все строки A_i матрицы A нулевые $\Rightarrow$ $A = O$. ■

Лемма 3. *Пуст дана матрица A размером $m \times n$ такая, что для любой строки X размером $1 \times m$ и любого столбца размером $n \times 1$ выполняется равенство $XAY = 0$. Тогда матрица A нулевая, $A = O$.*

Доказательство. Возьмем в качестве $X = (AY)^{\mathsf{T}} = Y^T A^{\mathsf{T}}$. Тогда получим, что

$(AY)^{\mathsf{T}}(AY) = 0 \Rightarrow AY = O$ для любого столбца Y. Из леммы следует, что $A = O$.

Лемма 4. *Пуст даны матрицы A и B размером $m \times n$ такие, что для любой строки X размером $1 \times m$ и любого столбца размером $n \times 1$ выполняется равенство $XAY = XBY$. Тогда матрицы A и B равны, $A = B$.*

Доказательство. Обозначим $C = A - B$. Тогда

$$XAY = XBY \Leftrightarrow XAY - XBY = 0 \Leftrightarrow X(A - B)Y = XCY = 0 \text{ для всех } X \text{ и } Y..$$

Из Леммы 3 следует, что $A - B = C = O \Rightarrow A = B$. ■
Замечание. Эти же леммы нужны и для вывода формул изменение координат вектора и матрицы оператора при переходе к другому базису. В лекциях они даны без вывода.
Доказательство Теоремы 4. Пусть X и Y – столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$. По условию, $(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}))$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$. Это значит, что для любых столбцов разменом $n \times 1$:

$(AX)^{\mathsf{T}} Y = X^{\mathsf{T}}(A^* Y) \Leftrightarrow x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} Y = X^{\mathsf{T}} A^* Y$. Из Леммы 4 следует, что $A^{\mathsf{T}} = A^*$. ■

Справедлива и обратная теорема:
Теорема 5.5. *Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – линейные операторы в конечномерном евклидовом пространстве, и их матрицы A и B в ортонормированном базисе связаны соотношением $B = A^{\mathsf{T}}$, то операторы A и B сопряжены, $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$.*

Теорема 5.6. *В конечномерном евклидовом пространстве E у любого линейного оператора $\mathcal{A}: E \to E$ есть сопряжённый $\mathcal{A}^*$.*
Доказательство. В конечномерном евклидовом пространстве всегда есть ортонормированный базис. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{B}$ с матрицей $B = A^{\mathsf{T}}$. Тогда по теореме 5, $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$.
Пример 1. Рассмотрим B евклидовом пространстве $\mathcal{P}_1(t)_{[0;1]}$ многочленов от t степени не выше 1 со скалярным произведением в виде интеграла по отрезку $[0;1]$. Оператор дифференцирования $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$ очевидно, линеен. Найти сопряженный ему оператор $\mathcal{D}^*$ в этом евклидовом пространстве.
Решение. В стандартном базисе $\{1;t\}$ матрица D оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ такая:

$$\mathcal{D}(1) = 1' = 0,\ \mathcal{D}(t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t \Rightarrow$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Но стандартный базис не ортонормированный. Процесс ортогонализации дает такой ортогональный базис: $q_1(t) = 1,\ q_2(t) = t - \frac{1}{2}$, который надо нормировать:

$$\|q_1\|^2 = \int_0^1 1^2\,dt = 1 \Rightarrow \|q_1\| = 1,$$

$$\|q_2\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow \|q_2\| = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

Ортонормированный базис ε: $e_1(t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t,\ e_2(t) = \frac{1}{\|q_2\|} \cdot q_2(t) = 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} \cdot 1 + 2\sqrt{3} \cdot t$

Матрица перехода от стандартного базиса к ортонормированному: $P = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Обратная матрица перехода: $P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Матрица D' оператора $\mathcal{D}$ в новом базисе ε:

$$D' = P^{-1} D P = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица искомого сопряженного оператора $\mathcal{D}^*$ в новом (ортонормированном) будет транспонированная к D':

$$(D')^* = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = D''.$$

Наконец, в исходном базисе $\{1; t\}$ матрица сопряженного оператора $\mathcal{D}^*$ такая:

$$D^* = PD''P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что результат применения оператора $\mathcal{D}^*$ к двучлену $p(t) = \alpha + \beta t$, т.е. со столбцом координат $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ в исходном базисе, получится двучлен, имеющий такой столбец координат в исходном базисе

$$Y = D^* X = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\alpha - 4\beta \\ 12\alpha + 6\beta \end{pmatrix}$$

Следовательно, $\mathcal{D}^*(\alpha + \beta t) = (-6\alpha - 3\beta) + (12\alpha + 6\beta)t = (6\alpha + 3\beta)(-1 + 2t)$. ■

Замечание. Один и тот же оператор в разных евклидовых пространствах может иметь разные сопряженные операторы.

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{F}_{[a;\,b]}$ – пространство функций, бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$ и обращающихся вместе со всеми своими производными в ноль на концах этого отрезка. Этому пространству, например, принадлежат все функции вида

$$f(t) = e^{-\frac{1}{(t-a)^n (b-t)^m}} R(t),\ a < t < b,\ f(a) = f(b) = 0,\ m, n > 1.$$

где $R(t)$ – любая рациональная функция, знаменатель которой не обращается в ноль на интервале $(a; b)$. Скалярное произведение задается интегралом по отрезку $[a; b]$

$$\big(x(t),\, y(t)\big) = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

. Покажем, что в этом пространстве для оператора дифференцирования $\mathcal{D} = \dfrac{d}{dt}$ сопряженный будет просто $\mathcal{D}^* = -\mathcal{D}$. В самом деле:

$$\big(\mathcal{D}x(t),\, y(t)\big) = \int_a^b \frac{dx}{dt} y(t)dt = \{\text{по частям}\} = \int_a^b y(t)\cdot dx =$$

$$= y(t)x(t)\Big|_a^b - \int_a^b x(t)\cdot dy = 0 - \int_a^b x(t)\frac{dy}{dt}dt = \big(x(t), -\mathcal{D}y(t)\big). ■$$

Возникает естественный вопрос: во всяком ли евклидовом пространстве для любого линейного оператора есть сопряженный? Ответ на него отрицательный.

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{P}(t)_{[0;1]}$ пространство* ***всех*** *многочленов от одной переменной t со скалярным произведением в виде интеграла по отрезку* $[0; 1]$. *Тогда оператор дифференцирования в этом евклидовом пространстве не имеет сопряженного.*

Доказательство опускается. Заметим лишь, что пространство $\mathcal{P}(t)_{[0;1]}$ бесконечномерно.

5.3. Самосопряженный оператор и его матрица в ортонормированном базисе.

Определение. Линейный оператор в евклидовом пространстве E называется ***самосопряженным***, если он совпадает со своим сопряженным, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, это значит, для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$

$$\big(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}),\, \boldsymbol{y}\big) = \big((\boldsymbol{x},\, \mathcal{A}(\boldsymbol{y})\big)$$

Теорема 8. *В конечномерном евклидовом пространстве линейный оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица A в (любом) ортонормированном базисе симметрична:* $A = A^{\mathsf{T}}$.

Доказательство немедленно следует из теоремы 4. Можно дать и независимое доказательство, но всё равно с использованием лемм 2, 3 и 4 выше в п.5.2:

Пусть X и Y – столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$. Тогда для любых столбцов X и Y размером $n \times 1$: $(AX)^{\mathsf{T}} Y = X^{\mathsf{T}}(AY) \Leftrightarrow x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} Y = X^{\mathsf{T}} AY$. Из Леммы 4 следует, что $A^{\mathsf{T}} = A$. ■

Пример 3. В пространстве $\boldsymbol{F}_{[a;\,b]}$ – из примера 2 выше оператор $\mathcal{A} = \mathcal{D}^2$ двукратного дифференцирования самосопряженный. В самом деле, для любых двух функций $x(t)$ и $y(t)$ этого пространства,
$$\left(\mathcal{A}(x(t)),\, y(t)\right) = \left(\mathcal{D}\left(\mathcal{D}(x(t))\right),\, y(t)\right) = -\left(\mathcal{D}(x(t)), \mathcal{D}(y(t))\right) = \left(x(t), \mathcal{D}\left(\mathcal{D}(y(t))\right)\right) = \left(x(t),\, \mathcal{A}(y(t))\right).$$

Нас интересуют свойства собственных векторов и собственных значений самосопряженного линейного оператора в конечномерном евклидовом пространстве.

5.4. Свойства корней характеристического многочлена самосопряженного оператора: вещественность и равенство алгебраических и геометрических кратностей (без док-ва).

Теорема 9. *Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора в n-мерном евклидовом пространстве вещественны.*

Доказательство проводится только для размерности $n = 2$ (и в общем случае опускается).

В ортонормированном базисе матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, характеристический многочлен

$P(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda = \det(A) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$, его дискриминант

$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$, поэтому оба корня вещественные. ■

Теорема 10. *Алгебраическая кратность каждого собственного значения* λ *самосопряженного линейного оператора равна его геометрической кратности, т.е. максимальному числу линейно независимых векторов, ему отвечающих.*

Доказательство опускается.

Из последних двух теорем следует, что *матрицу самосопряженного оператора всегда можно привести к диагональному виду, и на диагонали будут стоять корни характеристического уравнения, каждой корень столько раз, какова его кратность.*

5.5. Ортогональность собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих различным собственным значениям.

Сейчас мы увидим, что базис из собственных векторов самосопряженного оператора всегда можно выбрать ортонормированным.

Теорема 11. *Собственные векторы самосопряженного линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ являются собственными, отвечающие собственным значениям λ и μ соответственно самосопряженного линейного оператора $\mathcal{A}$, $\lambda \neq \mu$. Тогда $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ и $\mathcal{A}(\boldsymbol{y}) = \mu \boldsymbol{y}$, и поэтому
$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\right) = \left(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}(\boldsymbol{y})\right) = (\boldsymbol{x}, \mu \boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \Rightarrow$$
$$(\lambda - \mu)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

5.6. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора

Следствием теорем 9, 10 и 11 является

Теорема 12. *Для самосопряженного линейного оператора в конечномерном евклидовом пространстве всегда существует ортонормированный базис из собственных векторов, в котором матрица оператора диагональная, и на диагонали стоят собственные значения столько раз каждое, какова его алгебраическая кратность.*

Изложим ал**горитм нахождения такого базиса**, который одновременно является конструктивным доказательством теоремы 12. Пусть дана симметричная матрица A порядка n самосопряженного оператора, действующего в пространстве $\mathbf{R}^n$.

1) Составить характеристический многочлен $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, его степень равна n.

2) Найти собственные значения, т.е. корни уравнения n-й степени $P_A(\lambda)=0$ и определить их кратности. Если матрица состоит из целых чисел, то и все коэффициенты многочлена целые. В таком случае некоторые или все корни характеристического многочлена могут оказаться тоже целыми. Полезна

Теорема 13: *Если многочлен $P(\lambda)=a\lambda^n+b\lambda^{n-1}+\ldots+c\lambda+d$ с целыми коэффициентами имеет целый корень λ_0, то этот корень является делителем свободного члена d.*

3) Составить диагональную матрицу A' оператора в базисе из собственных векторов: на диагонали будут стоять корни характеристического уравнения, каждой корень столько раз, какова его кратность.

4) Для каждого собственного значения λ_i кратности k_i найти его собственное подпространство $S_i=\{x\in E \mid \mathcal{A}(\boldsymbol{x})=\lambda_i\boldsymbol{x}\}$. Для этого надо решить однородную СЛАУ с матрицей $A-\lambda_i E$, её ранг будет в точности $\operatorname{rg}(A-\lambda_i E)=n-k_i$, найти фундаментальную систему её решений, т.е. базис в подпространстве S_i.

5) Если размерность подпространства S_i больше 1, то с помощью процесса Грама – Шмидта базис подпространства базис S_i надо ортогонализовать.

6) Объединить полученные ортогональные базисы всех собственных подпространств S_i, получится ортогональный базис из собственных векторов всего пространства $\mathbf{R}^n$, поскольку согласно теореме 11, два вектора из разных собственных подпространств ортогональны.

7) Нормировать полученный ортогональный базис, получится ортонормированный базис из собственных векторов, в котором матрица оператора диагональная.

8) Выписать матрицу перехода Q к новому ортонормированному базису из собственных векторов, её столбцами будут координаты этих собственных векторов в исходном базисе, в том порядке, в каком на диагонали матрицы A' стоят соответствующие собственные числа.

Матрица Q должна обязательно получиться **ортогональной**, в том смысле, как мы сейчас узнаем.

5.7. Ортогональные преобразования, ортогональные матрицы и их свойства.

Замена координат, т.е. переход к другому базису называется ***преобразованием координат***, или просто ***преобразованием***.

Исходный базис часто автоматически является ортонормированным, например, стандартные базисы в пространстве V геометрических векторов и в арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$.

Вызывает интерес такое преобразование координат, когда и старый, и новый базис оба ортонормированны. Такое преобразование называется ***ортогональным***. Рассмотрим свойства матрицы перехода таких преобразований.

Определение. Квадратная матрица Q называется ***ортогональной***, если $Q^{\mathsf{T}}Q=QQ^{\mathsf{T}}=E$. Из этого определения следует, что следующие свойства

Теорема 14. *Пусть дана ортогональная матрица*

$$Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

Тогда:

(а) *матрица Q не вырождена и имеет обратную, совпадающую с её транспонированной: $Q^{-1}=Q^{\mathsf{T}}$;*

(б) *определитель матрицы Q равен 1 или –1;*

(в) *Сумма квадратов элементов любого столбца матрицы Q равна 1: $q_{1i}^2+q_{2i}^2+\ldots+q_{ni}^2=1$ $(i=1,2,\ldots,n)$*

(г) *Сумма произведений соответствующих элементов разных столбцов матрицы Q равна нулю*

$$q_{1i}q_{1j}+q_{2i}q_{2j}+\ldots+q_{ni}q_{nj}=0,\ (i\neq j)$$

(д) *Свойства, аналогичные (г) и (д) справедливы и для строк.*

Доказательство. (а) вытекает из определения ортогональной матрицы.

(б) $\Delta = \det(Q^{-1}) = \det\left(Q^{\mathsf{T}}\right) = \det(Q)$, тогда $1 = \det(QQ^{\mathsf{T}}) = \det(Q)\cdot\det(Q^{\mathsf{T}}) = \Delta^2 \Rightarrow \Delta = \pm 1$

(в) и (г). Элементы δ_{ij} произведения $Q^{\mathsf{T}}Q = E$ – это скалярные произведения строки с номером i матрицы Q^{T} (она же – столбец с таким номером матрицы Q) на столбец с номером j матрицы Q), $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, это и выражено данными свойствами.

(д) аналогично для произведения $QQ^{\mathsf{T}} = E$.

Пример 4. Не сложно проверить, что для любого φ матрицы

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ и } Q_2 = \begin{pmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

ортогональны. Можно доказать, что такими матрицами исчерпываются все ортогональные матрицы второго порядка.

Вот пример ортогональной матрицы третьего порядка:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Теорема 15. *Матрица перехода Q от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису ортогональна.*

(б) Обратно, если матрица перехода Q от ортонормированного базиса к какому-то другому базису ортогональна, то и второй базис ортонормированный.

Замечание. *Если матрица Q ортогональная, то все корни характеристического многочлена $\det(Q - \lambda E)$ – действительные или комплексные числа, по модулю равные 1.*

Подытожим. Рассмотрим произвольную квадратную симметричную матрицу A. её можно рассматривать как матрицу самосопряженного линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ в его стандартном (ортонормированном) базисе ε. Тогда обязательно существует ортонормированный базис $\varphi = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ из собственных векторов, в котором матрица этого оператора диагональная

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Пусть Q – матрица перехода $\varepsilon \to \varphi$. Матрица Q ортогональная и $A' = Q^{-1}AQ = Q^{\mathsf{T}}AQ$.

Таким образом, нами доказана:

Теорема 16. *Для любой симметричной квадратной матрицы A существует ортогональная матрица Q такая, что матрица $A' = Q^{-1}AQ = Q^{\mathsf{T}}AQ$ ортогональная.*

Пример 5. Привести матрицу линейного оператора

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

к диагональному виду ортогональным преобразованием.

Решение. Найдем коэффициенты характеристического многочлена $P(\lambda) = \lambda_3 - \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda - \alpha_3$:

$$\alpha_1 = \operatorname{Tr}(A) = 0 + 3 + 0 = 3,$$

$$\alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 - 1 - 4 = -9,$$

$$\alpha_3 = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 4 + 1 = 5,$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0$.
Очевидный корень $\lambda_1 = -1$, значит, многочлен $P(\lambda)$ делится без остатка на $(\lambda + 1)$. Выполняя деление, находим $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0$. Корни трехчлена $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ суть $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$. Итак, характеристический многочлен $P(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ имеет корни $\lambda = -1$ кратности $r = 2$, и $\lambda = 5$ кратности $r = 1$.
Сразу можем записать диагональный вид матрицы оператора:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Затем найдем собственные векторы.
1) собственное значение $\lambda = -1$. Матрица

$$A - \lambda E = A + E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 1, ей отвечает однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

(с двумя линейно независимыми решениями)
общее решение этой системы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C_1 + C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Линейно независимые собственные векторы $\boldsymbol{b}_1 = (-2; 1; 0)$ и $\boldsymbol{b}_2 = (1; 0; 1)$.
2) собственное значение $\lambda = 5$. Матрицу

$$A - \lambda E = A - 5E = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

приведем к ступенчатому виду (с помощью элементарных преобразований строк):

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её ранг равен 2, Соответствующая система однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ \quad\; x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Имеет общее решение $X = C\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \neq 0$ собственный вектор $\boldsymbol{b}_3 = (-1; -2; 1)$.

Вектор $\boldsymbol{b}_3$ в полном соответствии с теоремой 10, ортогонален векторам $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$, однако последние пока между собой не ортогональны: $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = -2 \neq 0$. Надо эту пару векторов ортогонализовать.
Вместо вектора $\boldsymbol{b}_2$ возьмем вектор $\boldsymbol{b}_2' = \mu \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$ (также являющийся собственным для собственного значения $\lambda = -1$ и поэтому он ортогонален вектору $\boldsymbol{b}_3$), а коэффициент $\mu \in \mathbf{R}$ подберем так, чтобы $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2') = 0$, отсюда

$$\mu = -\frac{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2} = -\frac{-2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Следовательно,

$b_2' = \frac{2}{5}b_1 + b_2 = \frac{2}{5}(-2;1;0)+(1;0;1) = \left(\frac{1}{5};\frac{2}{5};1\right)$. Далее, для удобства вычислений, вместо b_2' возьмем ему пропорциональный вектор $b_2'' = (1;2;5)$ с целыми координатами. Проверка: $(b_1, b_2'') = (b_3, b_2'') = 0$. Собственные векторы $\{b_1, b_2'', b_3\}$ образуют ортогональный базис, нормируем его:

$$f_1 = \frac{1}{\|b_1\|}b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2;1;0) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}};0\right),$$

$$f_2 = \frac{1}{\|b_2''\|}b_2'' = \frac{1}{\sqrt{30}}(1;2;5) = \left(\frac{1}{\sqrt{30}};\frac{2}{\sqrt{30}};\frac{5}{\sqrt{30}}\right),$$

$$f_3 = \frac{1}{\|b_3\|}b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1;-2;1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

В ортонормированном базисе $\varphi = \{f_1, f_2, f_3\}$, составленном из собственных векторов, матрица оператора имеет вышеуказанный диагональный вид, столбцами ортогональной матрицы перехода Q являются координаты этих векторов:

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Замечание. При нехватке времени этот пример можно заменить более простым с матрицей второго порядка $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

В заключение приведем сравнительную таблицу, описывающую свойства обычных и самосопряженных линейных операторов в конечномерном евклидовом пространстве.

	Свойство	**обычный оператор**	**самосопряженный оператор**
1	матрица линейного оператора	произвольная квадратная	симметричная в любом ортонормированном базисе
2	корни характеристического многочлена	могут быть как вещественными, так и комплексными	все корни вещественны.
3	собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям	линейно независимы	попарно ортогональны (и поэтому линейно независимы)
4	геометрическая кратность, т.е. количество линейно независимых собственных векторов, отвечающих данному собственному значению алгебраической кратности k	не более k	равна k
5	условие существование базиса из собственных векторов	все корни характеристического многочлена вещественны, и алгебраическая кратность каждого корня равна его геометрической кратности.	такой базис существует всегда, причем ортонормированный.

КОНЕЦ